Problema di Le Scienze - Marzo 2022

I giardini di marzo

I Rudi hanno deciso di comune accordo di cambiare l'aspetto delle aiuole del giardino del loro condominio. Per rendere il caso interessante dal punto di vista matematico, decidono che in ciascuna delle numerose aiuole sarà ricavato un triangolo più piccolo da destinare ai fiori, mentre il rimanente ospiterà un bel prato verde. Il problema nasce quando si passa all'algoritmo con cui sarà ottenuto il triangolo "interno": si partirà da un punto *P* scelto a caso da Alice. Da quel punto si condurranno le perpendicolari ai tre lati i cui punti di intersezione saranno vertici di un nuovo triangolo. Si ripeterà la procedura delle perpendicolari ai tre nuovi lati, sempre condotte dal medesimo punto P, individuando tre nuovi punti e di conseguenza un nuovo triangolo più piccolo. Si continua così finché non si arrivi a un triangolo simile (in denso geometrico) a quello di partenza. Questo darà il triangolo destinato alla coltivazione dei fiori.

Il quesito cui bisogna rispondere è: c'è la garanzia che alla fine si trovi l'agognato triangolo simile, possibilmente in un numero finito di passi?

La risposta è: SI.

DIMOSTRAZIONE

Il problema proposto è riconducibile a quello dei *triangoli pedali* (da "piede", cioè la proiezione ortogonale di un punto su una retta). Si dice *triangolo pedale* un triangolo avente per vertici le proiezioni ortogonali di un punto P interno sui tre lati. Il punto *P* si dice allora "Punto pedale".

La teoria su questo tipo di triangoli è stata sviluppata dal matematico irlandese John Casey e pubblicata nel 1892 (John Casey , *A Sequel to the First Six Books of the Elements of Euclid*, 6th edition, 1892)[1]. L'argomento è stato ripreso nel 1967 da Coxeter e Greitzer dell'American Mathematical Society fornendo un enunciato più esplicito del teorema: "**Il terzo triangolo pedale è simile al triangolo originale**", seguito da una dimostrazione che loro stessi definiscono "sorprendentemente semplice" e che sarebbe inutile trascrivere[2] integralmente, bastando dire che si dimostra la similitudine con il criterio dei tre angoli corrispondenti congruenti, e per

[1] Consultabile all'indirizzo https://www.google.com/books/edition/_/xAOuUnGPJmQC?gbpv=1

[2] La dimostrazione (in inglese) si può trovare alle pagine 24-25 nel volume citato che in parte è pubblicato da Google libri. Un'esposizione delle dimostrazioni con numerose illustrazioni si può trovare all'indirizzo http://www.lorenzoroi.net/geometria/Tpedali.html

giungere a questa conclusione si lavora sugli angoli che sottendono lo stesso arco nelle circonferenze costruite a partire dai vertici dei triangoli.

C'è un'interessante generalizzazione di questo teorema (anche citata nel volume di cui sopra) dovuta al matematico Bonnie M. Stuart che nel 1940 dimostrò[3] che lo stesso risultato vale per gli n-esimi pedali dei poligoni con n lati sono simili al poligono originale. Veramente Stuart dimostra un teorema ancora più potente e non limitato ai poligoni pedali perché dice che:

> *una data costruzione, semplice ma del tutto arbitraria, se completata n volte su ogni n-poligono dà un nuovo poligono direttamente simile all'originale, nonostante il fatto che i poligoni costruiti negli stadi intermedi possano essere di forma tanto diversa quanto sia possibile immaginare.*

Quella di costruire il poligono pedale è quindi una delle tante diverse costruzioni che, se iterate, porteranno sempre al poligono simile.

Stuart non si ferma qui perché dimostra (un corollario) che se si continua ad applicare la costruzione alla nuova figura si dovrà ottenere, dopo ulteriori n passi, un'altra figura simile alla precedente e, inoltre, se il poligono i-esimo è simile al poligono j-esimo, allora $i \equiv j \bmod n$.

Per completare il discorso, parliamo delle lunghezze dei lati del triangolo pedale.

Dette a, b e c le lunghezze dei lati del triangolo originale e indicate con x, y e z le distanze di P dai vertici A, B e C, si dimostra che le lunghezze dei lati del (primo) triangolo pedale sono date da:

$$\frac{ax}{2R};\quad \frac{by}{2R};\quad \frac{cz}{2R}$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo originale.

Se P coincide col circocentro, allora $x = y = R$ e i lati del (primo) triangolo pedale hanno lunghezze pari alla metà del triangolo iniziale.

Decollatura, 9 marzo 2022

Giuseppe Musolino

---

[3] Bonnie Madison Stuart, *Am. Math. Montly*, vol. 47, Aug.-Sept. 1940, pp. 462-466.

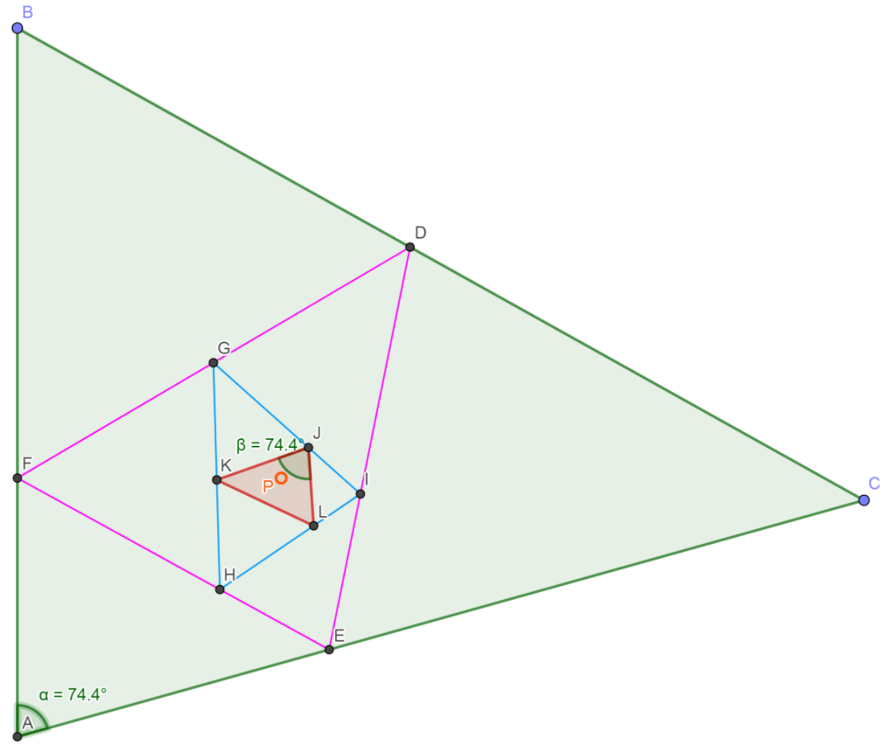

Figura 1. Triangoli pedali

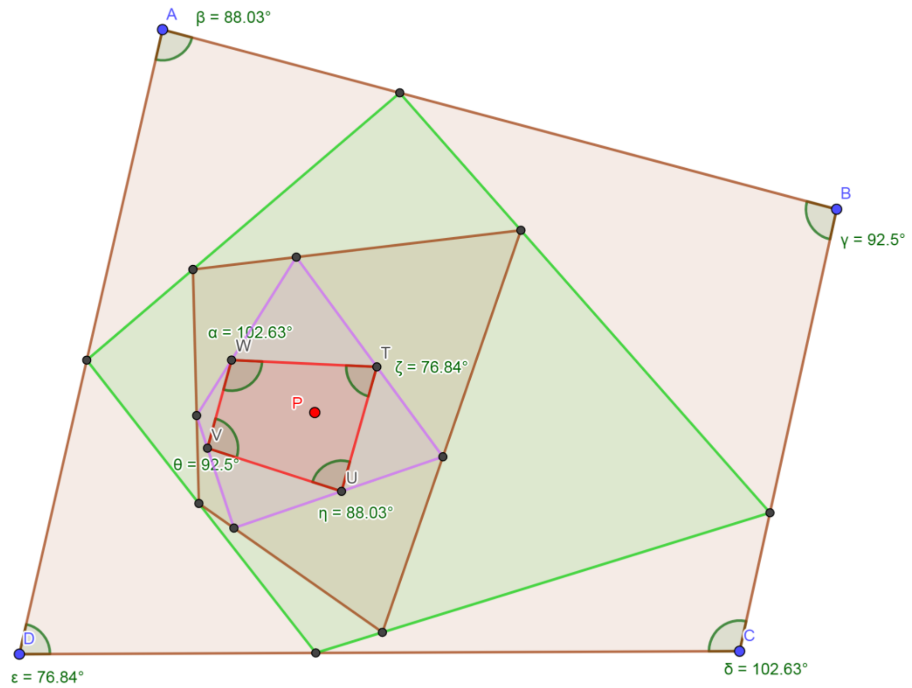

Figura 2. Quadrilateri pedali