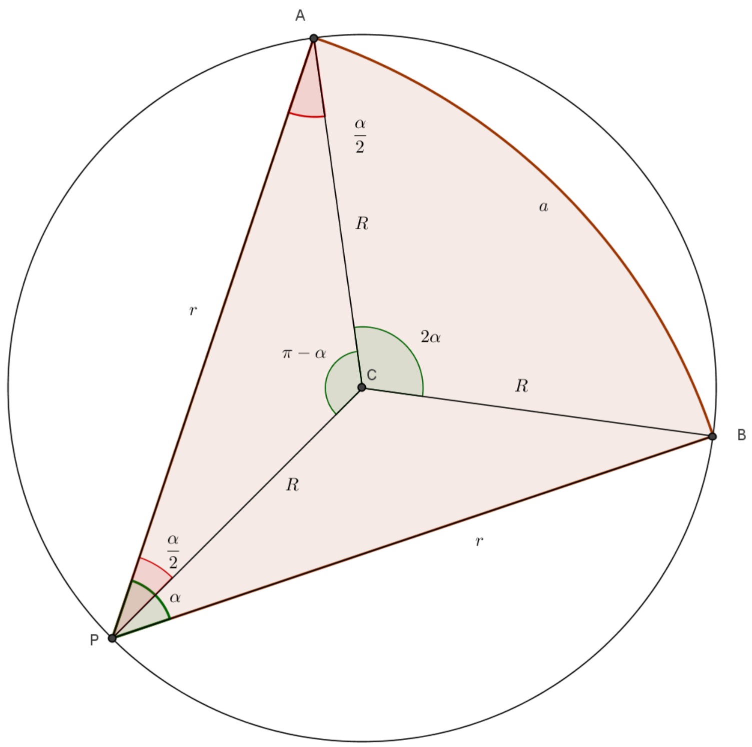
Problema di Le Scienze - Gennaio 2015

Fette di torte ortodosse

Il problema chiede di tagliare una fetta di torta di area massima con angolo alla circonferenza anziché al centro, come solitamente avviene.

Consideriamo la seguente figura in cui C è il centro della torta, R è il suo raggio, P è il vertice dell'angolo α che è la nostra incognita, *a* è la lunghezza dell'arco AB sotteso dai raggi di taglio PA e PB di lunghezza *r*.



Si tratta evidentemente di massimizzare l'area delimitata dai due raggi *r* e dall'arco AB di lunghezza *a* da essi sotteso. Se si sceglie come variabile del problema α, occorre trovare un'espressione che dia *r* in funzione di α. Tra le tante strade che si possono scegliere ho preferito fare riferimento al triangolo isoscele PCA di cui sono noti due lati *R* e gli angoli alla base $\frac{\alpha}{2}$.

Per il teorema delle proiezioni $r = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$. A questo punto trovo l'area del settore circolare PAB come prodotto del raggio al quadrato per il valore dell'angolo compreso espresso in radianti diviso 2:

$$S(\alpha) = \left(2Rcos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 4R^2\left(\frac{\alpha}{2} \cdot cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2R^2\left(\alpha \cdot cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

Per trovare il valore massimo di $S(\alpha)$ occorre trovare ed eguagliare a zero la sua derivata:

$$S'(\alpha) = 2R^2 \left(cos^2 \frac{\alpha}{2} + \alpha \left(2cos\frac{\alpha}{2} \right) \left(-sen\frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{2} \right)$$

che, semplificando, diventa:

$$S'(\alpha) = 2R^2 \left(cos^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha\, cos\frac{\alpha}{2}\; sen\frac{\alpha}{2} \right)$$

Se imponiamo che la derivata prima debba essere nulla, otteniamo:

$$cos^2 \frac{\alpha}{2} - \alpha\, cos\frac{\alpha}{2}\; sen\frac{\alpha}{2} = 0$$

Utilizzando le formule di bisezione del coseno e l'inverso di quella di duplicazione del seno otteniamo:

$$\frac{1 + \cos\alpha}{2} - \alpha \cdot \frac{sen\alpha}{2} = 0$$

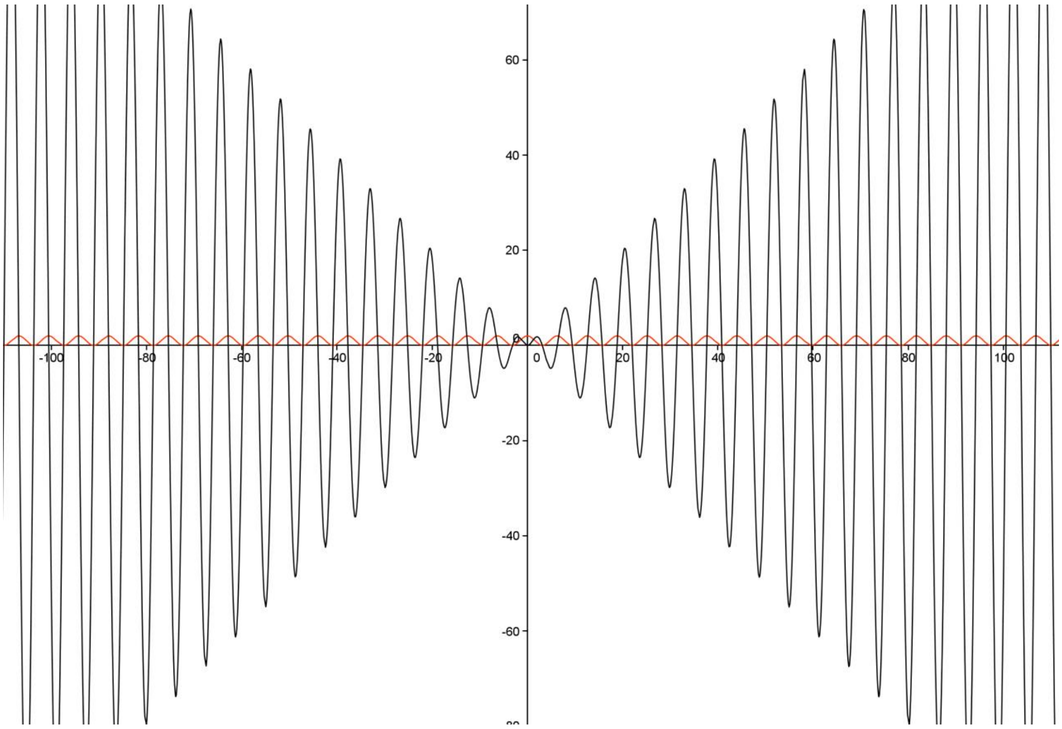
da cui:

$$1 + cos\alpha - \alpha \cdot sen\alpha = 0$$

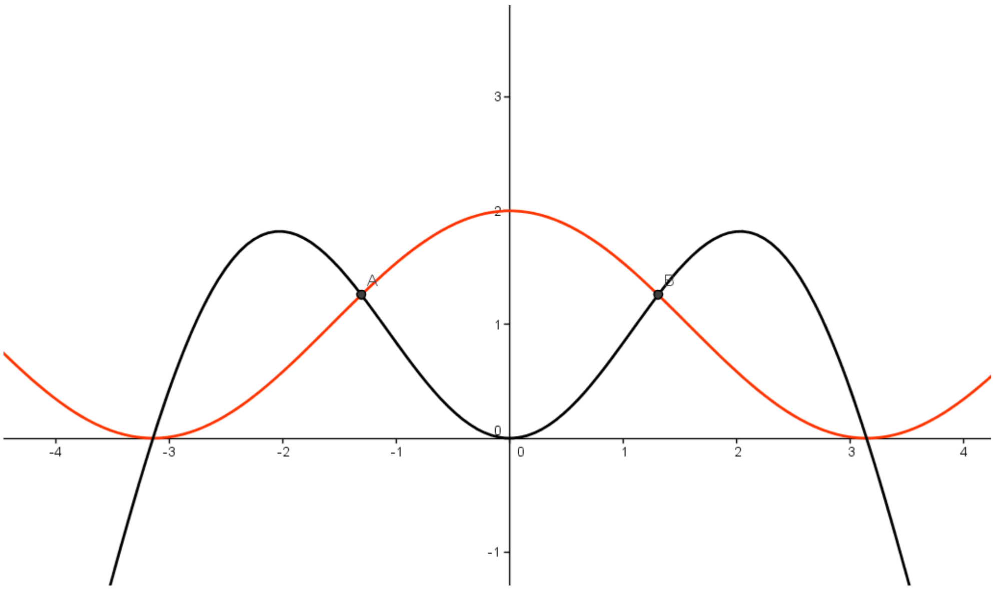
Le radici di questa equazione non possono essere trovate per via algebrica o goniometrica ma solo per via grafica, necessariamente approssimata. Per fare ciò la riscriviamo nella forma:

$$1 + cos\alpha = \alpha \cdot sen\alpha$$

La funzione al primo membro è la funzione coseno traslata in alto di una unità mentre al secondo membro c'è la funzione seno moltiplicata la funzione crescente $f(x) = \pm\alpha$, vale a dire le bisettrici dei quadranti che delimitano l'inviluppo della funzione seno:



Le curve hanno infiniti punti di intersezione ma quelli che ci interessano, anzi quello che ci interessa, si trova vicino all'origine, nel primo quadrante:



Il suo valore è circa 1,3 radianti ma utilizzando metodi automatici o manuali (!) può esser conosciuto con maggiore approssimazione:

α =1,3065423741888062022287278 radianti

= 74 gradi 51 primi e 33,70966567616054 secondi d'arco.

Ho effettuato anche il calcolo di quanto questa fetta massima sia rispetto al totale della torta ottenendo:

$$\frac{S_{max}}{S} = \frac{2R^2\left(\alpha \cdot cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi\, R^2} = \frac{2}{\pi}\left(1.306542374 \cdot cos^2\frac{1.306542374}{2}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(1.306542374 \cdot cos^2\frac{1.306542374}{2}\right) \cong 52{,}45\%$$