Dadi alla carbonara.

Il gioco più conveniente, ossia quello in cui Alice ha più probabilità di vincita, è il terzo. Le rispettive probabilità delle tre varianti del gioco dei dadi a 20 facce sono:
1°gioco: 28,5%; 2°gioco: 43,875%; 3°gioco: 54, 15%.

Il calcolo della probabilità di vincere per ciascuno dei giochi è stato effettuato tenendo conto della definizione di probabilità matematica come numero dei casi favorevoli diviso il numero dei casi possibili.

Il numero dei casi possibili è dato, per tutte e tre le varianti del gioco, dalla disposizione con ripetizione di 20 elementi presi a tre a tre (n=20, k=3) che, secondo la teoria del calcolo combinatorio, è dato da n^k cioè $20^3 = 8000$, quindi per calcolare la probabilità di vincita occorre calcolare il numero degli eventi favorevoli per ciascuna delle tre varianti del gioco.

Primo gioco

Si tratta di calcolare quante combinazioni vincenti per Alice ci sono, tenendo conto delle 8000 possibili.

A questo fine ho costruito la seguente tabella:

primo dado →	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	1	0	**1**	0	**1**	1	**1**	2	**1**	3	**1**	4	**1**	5	**1**	6	**1**	7	**1**	8
	2	0	**2**	0	**2**	0	**2**	1	**2**	2	**2**	3	**2**	4	**2**	5	**2**	6	**2**	7
	3	1	**3**	0	**3**	0	**3**	0	**3**	1	**3**	2	**3**	3	**3**	4	**3**	5	**3**	6
	4	2	**4**	1	**4**	0	**4**	0	**4**	0	**4**	1	**4**	2	**4**	3	**4**	4	**4**	5
	5	3	**5**	2	**5**	1	**5**	0	**5**	0	**5**	0	**5**	1	**5**	2	**5**	3	**5**	4
	6	4	**6**	3	**6**	2	**6**	1	**6**	0	**6**	0	**6**	0	**6**	1	**6**	2	**6**	3
	7	5	**7**	4	**7**	3	**7**	2	**7**	1	**7**	0	**7**	0	**7**	0	**7**	1	**7**	2
	8	6	**8**	5	**8**	4	**8**	3	**8**	2	**8**	1	**8**	0	**8**	0	**8**	0	**8**	1
	9	7	**9**	6	**9**	5	**9**	4	**9**	3	**9**	2	**9**	1	**9**	0	**9**	0	**9**	0
In rosso: secondo dado	**10**	8	**10**	7	**10**	6	**10**	5	**10**	4	**10**	3	**10**	2	**10**	1	**10**	0	**10**	0
	11	9	**11**	8	**11**	7	**11**	6	**11**	5	**11**	4	**11**	3	**11**	2	**11**	1	**11**	0
	12	10	**12**	9	**12**	8	**12**	7	**12**	6	**12**	5	**12**	4	**12**	3	**12**	2	**12**	1
	13	11	**13**	10	**13**	9	**13**	8	**13**	7	**13**	6	**13**	5	**13**	4	**13**	3	**13**	2
	14	12	**14**	11	**14**	10	**14**	9	**14**	8	**14**	7	**14**	6	**14**	5	**14**	4	**14**	3
	15	13	**15**	12	**15**	11	**15**	10	**15**	9	**15**	8	**15**	7	**15**	6	**15**	5	**15**	4
	16	14	**16**	13	**16**	12	**16**	11	**16**	10	**16**	9	**16**	8	**16**	7	**16**	6	**16**	5
	17	15	**17**	14	**17**	13	**17**	12	**17**	11	**17**	10	**17**	9	**17**	8	**17**	7	**17**	6
	18	16	**18**	15	**18**	14	**18**	13	**18**	12	**18**	11	**18**	10	**18**	9	**18**	8	**18**	7
	19	17	**19**	16	**19**	15	**19**	14	**19**	13	**19**	12	**19**	11	**19**	10	**19**	9	**19**	8
	20	18	**20**	17	**20**	16	**20**	15	**20**	14	**20**	13	**20**	12	**20**	11	**20**	10	**20**	9
somma:		171		153		137		123		111		101		93		87		83		81
totale:	2280	casi favorevoli																		

Nella prima riga orizzontale ho riportato il numero uscito con il primo dado e nella corrispondente prima colonna, in rosso, sono riportati i possibili valori abbinati usciti col secondo dado. A fianco di ogni numero rosso è riportato un numero che rappresenta il numero di uscite col terzo dado, quello di Alice, che consentirebbero a quest'ultima di vincere, tenendo conto delle regole del gioco.

Così, ad esempio, se con il primo dado abbiamo ottenuto 3 e con il secondo dado esce 12, a fianco del 12 nella colonna 3 leggiamo 8 che rappresenta appunto quanti valori del terzo dado consentirebbero ad Alice di vincere (i valori sono: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20). In basso ad ogni colonna con numeri in nero, ho riportato la somma dei valori di ogni colonna che rappresenta il numero di combinazioni vincenti. Ad esempio, sotto la colonna con 5 uscito sul primo dado, ci sono in tutto 111 uscite vincenti possibili, considerando tutte le possibili combinazioni tra il valore del secondo e del terzo dado che darebbero la vincita ad Alice. Il calcolo dei valori con cui riempire la tabella sarebbe molto lungo se non si notasse che c'è una certa ciclicità nei valori ottenuti che consente di completarla abbastanza rapidamente (ad esempio usando un programma di foglio elettronico con il riempimento automatico delle celle). Inoltre, sempre per la simmetria dei valori sui primi due dadi, dopo aver calcolato i valori delle possibilità di vincita con le uscite fino a 10 col primo dado, per trovare quelle totali basta raddoppiare quelli ottenuti perché le possibilità di vincita di Alice col terzo dado sono le stesse se i primi due dadi hanno dato, ad esempio, 4 e 13 oppure 13 e 4.

Procedendo in questo modo, si ottengono per il primo gioco, 2280 casi favorevoli per Alice che divisi per gli 8000 possibili portano la probabilità di vincita a

$$p = \frac{2280}{8000} = 0{,}285 = 28{,}5\%$$

E' interessante osservare anche che cosa succede con le regole del primo gioco, se si usano dadi con un numero diverso di facce. Indicato con n il numero di facce si ottengono i seguenti risultati:

- n = 2, praticamente il lancio di una moneta, impossibile vincere, p = 0
- n = 3, p = 7,4%
- n = 4, p = 12,5&
- n = 10, p = 24%
- n =15, p = 27%
- n = 18, p = 27,9%
- n = 20, p = 28,5%

Cosa si nota in questi risultati? Innanzitutto, ovviamente, che la possibilità di vincere per Alice cresce col crescere del numero delle facce dei dadi, anche perché i due casi in cui Alice ottiene un numero uguale ad uno dei due già usciti sui primi due dadi diventa sempre più trascurabile al crescere di n.

La formula che mi dà il numero di eventi favorevoli per tre dadi a n facce è:

$$N = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{k}$$

Si tratta di un polinomio di terzo grado che per k = 3, semplificato, dà l'equazione

$$N = \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{2}{3}n$$

La probabilità di vincita per Alice quindi è (per il caso generale):

$$p = \frac{N}{n^3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{k \cdot n^3} \quad (1)$$

che, per $k = 3$ (gioco con 3 dadi), diventa

$$p = \frac{N}{n^3} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot n^3}$$

Sostituendo $n = 20$ fornisce esattamente:

$$p = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 20^3} = \frac{6840}{24000} = 0{,}285 = 28{,}5\% \, .$$

Facendo tendere n all'infinito, si scopre che il valore limite della probabilità di vincere col primo gioco, aumentando il numero delle facce del dado, è 33,33%, in quanto

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot n^3} = \frac{1}{3}.$$

Nella formula generale (1) compare ancora k , il numero di dadi, anche se, strettamente parlando, non la si potrebbe usare perché, ad esempio con 5 dadi, bisognerebbe modificare completamente le regole del gioco per stabilire chi vince e, quindi, tutti i discorsi fatti non sarebbero estendibili per il calcolo dei casi favorevoli.

Secondo gioco

Per quanto riguarda il secondo gioco, si può procedere analogamente al primo e cioè costruendosi una tabella (stessi significati della precedente).

primo dado →	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	1	0	1	18	1	17	1	16	1	15	1	14	1	13	1	12	1	11	1	10
	2	18	2	0	2	17	2	16	2	15	2	14	2	13	2	12	2	11	2	10
	3	17	3	17	3	0	3	16	3	15	3	14	3	13	3	12	3	11	3	10
	4	16	4	16	4	16	4	0	4	15	4	14	4	13	4	12	4	11	4	10
	5	15	5	15	5	15	5	15	5	0	5	14	5	13	5	12	5	11	5	10
	6	14	6	14	6	14	6	14	6	14	6	0	6	13	6	12	6	11	6	10
	7	13	7	13	7	13	7	13	7	13	7	13	7	0	7	12	7	11	7	10
	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	0	8	11	8	10
	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	0	9	10
In rosso: secondo dado	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	0
	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9	11	9
	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	8	12	9
	13	7	13	7	13	7	13	7	13	7	13	7	13	7	13	7	13	8	13	9
	14	6	14	6	14	6	14	6	14	6	14	6	14	6	14	7	14	8	14	9
	15	5	15	5	15	5	15	5	15	5	15	5	15	6	15	7	15	8	15	9
	16	4	16	4	16	4	16	4	16	4	16	5	16	6	16	7	16	8	16	9
	17	3	17	3	17	3	17	3	17	4	17	5	17	6	17	7	17	8	17	9
	18	2	18	2	18	2	18	3	18	4	18	5	18	6	18	7	18	8	18	9
	19	1	19	1	19	2	19	3	19	4	19	5	19	6	19	7	19	8	19	9
	20	0	20	1	20	2	20	3	20	4	20	5	20	6	20	7	20	8	20	9
somma		171		172		173		174		175		176		177		178		179		180
totale:	3510	casi favorevoli																		

La massima attenzione va posta nel calcolo dei casi favorevoli in quanto Alice può scegliere il “suo” dado e la strategia migliore da seguire è quella di scegliere il dado con valore superiore, se entrambi i dadi sono inferiori a 10, mentre le conviene scegliere quello di valore inferiore se entrambi sono superiori a 10. Se un dado è inferire o uguale a 10 e l’altro è superiore o uguale deve scegliere quello che dista di più rispettivamente da 1 o da 20. Se i due dadi hanno dato valore uguale, la partita è persa.

Dalla tabella precedente si desume che il numero dei casi favorevoli di vincita è 3510 che diviso il solito numero di casi possibili di 8000 dà

$$p = \frac{3510}{8000} = 0{,}43875 = 43{,}875\%$$

La probabilità di vincita, con la giusta strategia, è aumentata notevolmente rispetto al primo gioco.

Terzo gioco

Il terzo gioco è una variante ancora più favorevole ad Alice in quanto, in pratica, le consente di scegliere se giocare al primo gioco o al secondo dopo aver visto il valore dei primi due dadi. La situazione le è favorevole perché se i primi due dadi hanno fornito valori molto vicini (ma non uguali!) ad Alice conviene scegliere uno dei due dadi come "**suo**", giocando quindi al **secondo gioco** e attenendosi alle valutazioni esposte nel caso precedente. Quando però i due dadi usciti hanno fornito valori molto diversi ad Alice conviene tentare il lancio del suo dado ricadendo quindi nel **primo gioco**, dove però non c'è alcuna strategia da attivare.

La vera complessità del calcolo adesso sta nel trovare la *soglia* per scegliere l'uno o l'altro gioco. Potremo così riassumere la strategia:

- se i due dadi danno lo stesso numero, la partita è persa.
- se un dado fornisce un valore inferiore a 10, e l'altro assume un valore fino a 10 (compreso), Alice sceglierà il **secondo gioco** scegliendo come "suo" dado quello con valore maggiore.
- se un dado fornisce un valore inferiore a 10, a seconda del valore del secondo dado, può ancora convenire scegliere il **secondo gioco** valutando se sussiste la seguente disuguaglianza:

  $d_1 - 1 > d_2 - d_1 - 1$ oppure $20 - d_2 > d_2 - d_1 - 1$ dove d_1 è il valore inferiore uscito nei dadi e d_2 è quello maggiore. Ad esempio, se i valori dei dadi sono 7 e 13:
  $7 - 1 > 13 - 7 - 1$, $6 > 5$ che è vero e quindi anche in questo caso conviene il secondo gioco scegliendo il dado col valore inferiore se $d_1 - 1 > d_2 - d_1 - 1$, altrimenti si sceglie il maggiore.
  Se invece i dadi avessero fornito i numeri 2 e 12:

  $2 - 1 > 12 - 2 - 1$, $1 > 9$, che è falso così come lo è l'altra: $20 - 12 > 12 - 2 - 1$ che darebbe $8 > 9$. In questo caso conviene scegliere di tirare il terzo dado, rientrando nelle regole del **primo gioco**.
- Se entrambi i dadi superano il 10, ma anche con uno dei due uguale a 10, conviene scegliere il **secondo gioco** scegliendo come proprio dado quello col valore inferiore.
- Se uno dei dadi supera il 10 e l'altro no, la scelta va fatta tenendo conto delle valutazioni fatte al terzo punto.

Nella tabella seguente sono stati messi a confronto, per ogni coppia di valori usciti sui primi due dadi, il numero delle possibilità di vincita di Alice con le regole del primo gioco e quelle del secondo, calcolato secondo i criteri precedenti. Nella terza colonna è riportato il numero degli eventi favorevoli preso dalla prima o seconda colonna, scegliendo il valore massimo.

Ne consegue che in questo **terzo gioco** la probabilità di vincita per Alice è:

$$p = \frac{4332}{8000} = 0{,}5415 = 54{,}15\%\ .$$

primo dado →	1				2				3				4				5			
		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore
In rosso: secondo dado	**1**	0	0	0	**1**	0	18	18	**1**	1	17	17	**1**	2	16	16	**1**	3	15	15
	2	0	18	18	**2**	0	0	0	**2**	0	17	17	**2**	1	16	16	**2**	2	15	15
	3	1	17	17	**3**	0	17	17	**3**	0	0	0	**3**	0	16	16	**3**	1	15	15
	4	2	16	16	**4**	1	16	16	**4**	0	16	16	**4**	0	0	0	**4**	0	15	15
	5	3	15	15	**5**	2	15	15	**5**	1	15	15	**5**	0	15	15	**5**	0	0	0
	6	4	14	14	**6**	3	14	14	**6**	2	14	14	**6**	1	14	14	**6**	0	14	14
	7	5	13	13	**7**	4	13	13	**7**	3	13	13	**7**	2	13	13	**7**	1	13	13
	8	6	12	12	**8**	5	12	12	**8**	4	12	12	**8**	3	12	12	**8**	2	12	12
	9	7	11	11	**9**	6	11	11	**9**	5	11	11	**9**	4	11	11	**9**	3	11	11
	10	8	10	10	**10**	7	10	10	**10**	6	10	10	**10**	5	10	10	**10**	4	10	10
	11	9	9	9	**11**	8	9	9	**11**	7	9	9	**11**	6	9	9	**11**	5	9	9
	12	10	8	10	**12**	9	8	9	**12**	8	8	8	**12**	7	8	8	**12**	6	8	8
	13	11	7	11	**13**	10	7	10	**13**	9	7	9	**13**	8	7	8	**13**	7	7	7
	14	12	6	12	**14**	11	6	11	**14**	10	6	10	**14**	9	6	9	**14**	8	6	8
	15	13	5	13	**15**	12	5	12	**15**	11	5	11	**15**	10	5	10	**15**	9	5	9
	16	14	4	14	**16**	13	4	13	**16**	12	4	12	**16**	11	4	11	**16**	10	4	10
	17	15	3	15	**17**	14	3	14	**17**	13	3	13	**17**	12	3	12	**17**	11	4	11
	18	16	2	16	**18**	15	2	15	**18**	14	2	14	**18**	13	3	13	**18**	12	4	12
	19	17	1	17	**19**	16	1	16	**19**	15	2	15	**19**	14	3	14	**19**	13	4	13
	20	18	0	18	**20**	17	1	17	**20**	16	2	16	**20**	15	3	15	**20**	14	4	14
somma:		171	171	261		153	172	252		137	173	242		123	174	232		111	175	221
totale:			4332																	

primo dado →	6				7				8				9				10			
		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore		1 tipo	2 tipo	migliore
In rosso: secondo dado	**1**	4	14	14	**1**	5	13	13	**1**	6	12	12	**1**	7	11	11	**1**	8	10	10
	2	3	14	14	**2**	4	13	13	**2**	5	12	12	**2**	6	11	11	**2**	7	10	10
	3	2	14	14	**3**	3	13	13	**3**	4	12	12	**3**	5	11	11	**3**	6	10	10
	4	1	14	14	**4**	2	13	13	**4**	3	12	12	**4**	4	11	11	**4**	5	10	10
	5	0	14	14	**5**	1	13	13	**5**	2	12	12	**5**	3	11	11	**5**	4	10	10
	6	0	0	0	**6**	0	13	13	**6**	1	12	12	**6**	2	11	11	**6**	3	10	10
	7	0	13	13	**7**	0	0	0	**7**	0	12	12	**7**	1	11	11	**7**	2	10	10
	8	1	12	12	**8**	0	12	12	**8**	0	0	0	**8**	0	11	11	**8**	1	10	10
	9	2	11	11	**9**	1	11	11	**9**	0	11	11	**9**	0	0	0	**9**	0	10	10
	10	3	10	10	**10**	2	10	10	**10**	1	10	10	**10**	0	10	10	**10**	0	0	0
	11	4	9	9	**11**	3	9	9	**11**	2	9	9	**11**	1	9	9	**11**	0	9	9
	12	5	8	8	**12**	4	8	8	**12**	3	8	8	**12**	2	8	8	**12**	1	9	9
	13	6	7	7	**13**	5	7	7	**13**	4	7	7	**13**	3	8	8	**13**	2	9	9
	14	7	6	7	**14**	6	6	6	**14**	5	7	7	**14**	4	8	8	**14**	3	9	9
	15	8	5	8	**15**	7	6	7	**15**	6	7	7	**15**	5	8	8	**15**	4	9	9
	16	9	5	9	**16**	8	6	8	**16**	7	7	7	**16**	6	8	8	**16**	5	9	9
	17	10	5	10	**17**	9	6	9	**17**	8	7	8	**17**	7	8	8	**17**	6	9	9
	18	11	5	11	**18**	10	6	10	**18**	9	7	9	**18**	8	8	8	**18**	7	9	9
	19	12	5	12	**19**	11	6	11	**19**	10	7	10	**19**	9	8	9	**19**	8	9	9
	20	13	5	13	**20**	12	6	12	**20**	11	7	11	**20**	10	8	10	**20**	9	9	9
somma:		101	176	210		93	177	198		87	178	188		83	179	182		81	180	180

Decollatura, 12 lug. 08