

Aspiranti Baristi Orbitali

Se l'ubicazione dei bar fosse decisa "centralmente" oppure i baristi fossero costretti a riunirsi per decidere insieme le rispettive posizioni, l'ubicazione ottimale per tutti i 4 bar sarebbe quella nelle 4 posizioni diametralmente opposte (a 90° l'uno dall'altro). Se però le collocazioni non sono assegnate da un'autorità centrale ma ci si affida alla scelta individuale, uno alla volta, bisogna affrontare il problema con le strategie del gioco come il "tris" o "filetto".

Per studiare la strategia migliore da adottare bisogna ammettere l'ipotesi che nessuno dei baristi abbia stretto un accordo con qualcun altro, nemmeno con noi stessi (il bar 2), e che le loro scelte siano dettate solo dalla convenienza o, a parità di convenienza, dal **caso**.

Prendiamo in considerazione quindi le diverse opzioni, ovvero i diversi comportamenti che potrebbero avere i quattro aspiranti baristi, e alla fine trarremo le nostre conclusioni.

1. Comportamento collaborativo.

Ciascuno dei baristi, escluso il primo che può fare ciò che vuole, sapendo che in totale devono essere aperti quattro bar, può decidere di occupare una posizione che terrà conto anche degli altri che dovranno ancora scegliere il proprio posto con lo scopo di lasciar loro un giusto spazio vitale.

Vantaggi: non deve aspettarsi dispetti da parte di qualcun altro e potrebbe contare sulla sua quota naturale di clienti pari a $\frac{1}{4}$ del totale.

Svantaggi: non può contare su "errori" da parte dei baristi che apriranno dopo di lui e sperare in una quota maggiore. Vedremo in seguito se esiste questa possibilità.

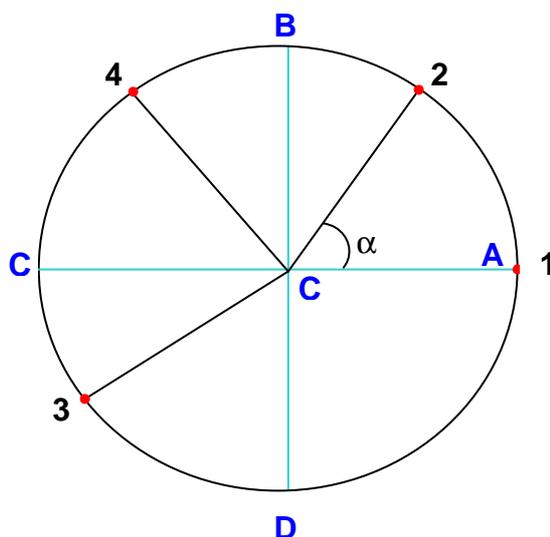
Nel caso di comportamento collaborativo il secondo barista, cioè noi, può aprire il bar in uno dei tre punti liberi rimanenti ai vertici delle posizioni diametralmente opposte indicate in precedenza e il discorso è chiuso con $\frac{1}{4}$ dei clienti totali.

2. Comportamento neutrale.

Ciascuno dei baristi sceglie in base alla sua convenienza determinata nel momento in cui apre il bar, sapendo solo che chi aprirà dopo di lui userà il suo stesso criterio.

In questo caso bisogna analizzare quantitativamente le conseguenze di ogni possibile scelta, in termini di clienti potenziali di cui si disporrà.

Introduciamo alcune convenzioni:



- a) **A**: punto iniziale in cui si trova il primo bar; è un punto qualsiasi sulla circonferenza;
- b) **CA**: raggio di riferimento per l'origine degli angoli;
- c) α : angolo formato dal raggio passante per la posizione occupata dal secondo bar (il nostro); è la variabile del problema. Data la simmetria circolare, possiamo considerare $0 < \alpha \leq 180^\circ$ (escludiamo il valore 0 che corrisponderebbe all'apertura di un bar nella stessa posizione del primo già aperto);
- d) **1-2-3-4**: nome e posizione dei bar in ordine di apertura.
- e) Il numero dei clienti spettanti a ciascun bar verrà misurato in unità arbitrarie date dalla somma delle semidistanze angolari che lo separano dai due bar con cui confina. Con questa unità il numero degli abitanti (o clienti) è 360 (l'intero giro in gradi) e il numero che in una divisione equa di clienti spetterà a ciascuno dei bar è 90: chi ne ottiene di meno è stato "sfortunato", chi ne ottiene di più è stato lungimirante o "fortunato".

Vediamo in queste condizioni qual è la migliore scelta da fare.

Cominciamo a scegliere angoli piccoli, partendo proprio da 0 (è un'ipotesi di scuola, forse da escludere per motivi di opportunità, però le regole tacciono su questo punto e quindi noi affrontiamo il calcolo). Il **bar 3** sarebbe costretto ad aprire nel punto C mentre al **bar 4** resterebbe la possibilità di aprire in B o D. In entrambi i casi il **bar 2** potrebbe contare su 67,50 clienti, come il **bar 1**, mentre la migliore posizione verrebbe a toccare al **bar 3** con 135 clienti e il **bar 4** con 67,50.

Per quanto detto al punto e) dell'elenco precedente, il **bar 2** avendo ottenuto meno di 90 clienti ha effettuato una scelta sbagliata.

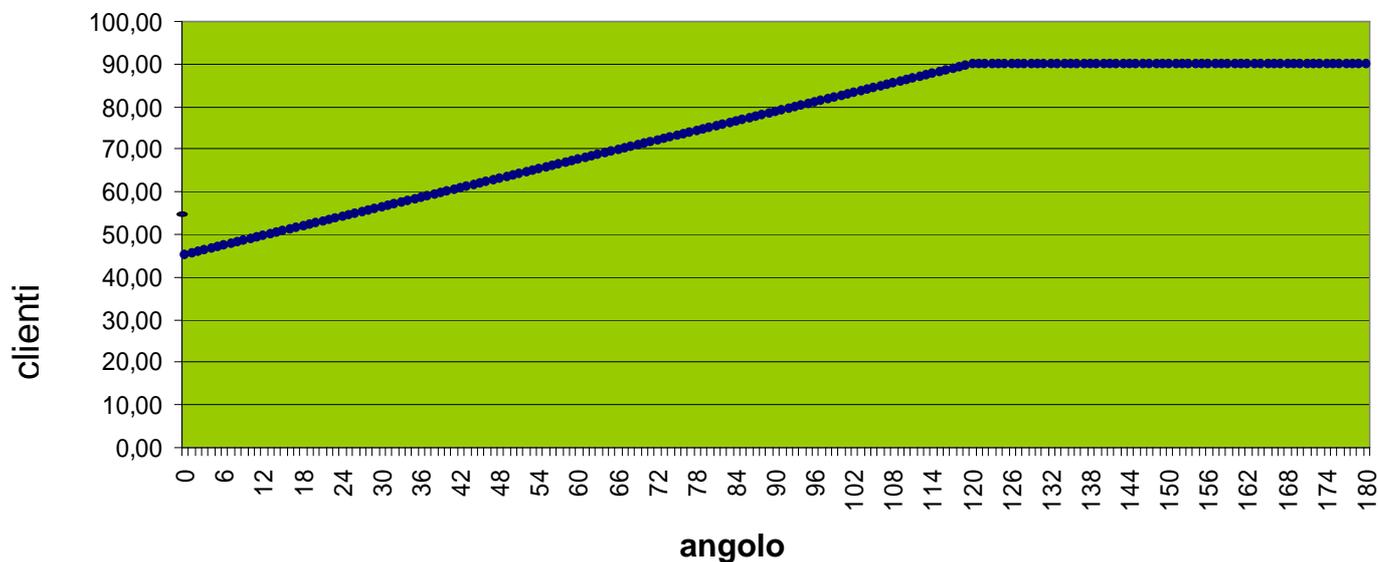
Aumentando l'angolo si ottiene un aumento dei clienti come dimostra la seguente tabella:

Numero del bar:	1	2	3	4	Clianti per bar 2
Posizione bar (angolo in gradi)	0,00	0,00	180,00	90,00	67,50
	0,00	1,00	180,50	90,75	45,38
	0,00	2,00	181,00	91,50	45,75
	0,00	3,00	181,50	92,25	46,13
	0,00	4,00	182,00	93,00	46,50
	0,00	5,00	182,50	93,75	46,88
	0,00	6,00	183,00	94,50	47,25
	0,00	7,00	183,50	95,25	47,63
	0,00	8,00	184,00	96,00	48,00
	0,00	9,00	184,50	96,75	48,38
	0,00	10,00	185,00	97,50	48,75
	0,00	11,00	185,50	98,25	49,13
	0,00	12,00	186,00	99,00	49,50
	0,00	13,00	186,50	99,75	49,88
	0,00	14,00	187,00	100,50	50,25
	0,00	15,00	187,50	101,25	50,63
	0,00	16,00	188,00	102,00	51,00
	0,00	17,00	188,50	102,75	51,38
	0,00	18,00	189,00	103,50	51,75
	0,00	19,00	189,50	104,25	52,13
	0,00	20,00	190,00	105,00	52,50
	0,00	21,00	190,50	105,75	52,88
	0,00	22,00	191,00	106,50	53,25
	0,00	23,00	191,50	107,25	53,63
	0,00	24,00	192,00	108,00	54,00
	0,00	25,00	192,50	108,75	54,38
	0,00	26,00	193,00	109,50	54,75
	0,00	27,00	193,50	110,25	55,13
	0,00	28,00	194,00	111,00	55,50
	0,00	29,00	194,50	111,75	55,88
0,00	30,00	195,00	112,50	56,25	

Da notare il valore anomalo per l'angolo 0 rispetto a quelli immediatamente maggiori: si tratta di una *discontinuità* della funzione. Il valore (il limite) che la funzione "avrebbe dovuto" assumere sarebbe di 45 ma in realtà è 67,50.

Per contenere la lunghezza della tabella ci fermiamo a 30° ma anche andando avanti assistiamo ad una crescita lineare del numero dei clienti del **bar 2** (nel numero dei clienti lasciamo il numero decimale poiché siamo in unità arbitrarie). In ogni caso siamo sempre al di sotto dei 90 clienti e quindi nessuna di queste scelte è vantaggiosa. Continuando ad aumentare l'angolo α arriviamo al valore di 120° dove si raggiunge per la prima volta il valore di 90 clienti. Sembra questa la scelta giusta.

Però da 120° in poi avviene un fatto sorprendente, e cioè che fino a 180°, quindi fino alla posizione diametralmente opposta a quella del primo bar, il numero di clienti per il **bar 2** rimane **sempre di 90**.



3. Comportamento “fortunato”.

Con questo tipo di comportamento intendiamo quello secondo il quale il **bar 2** sceglie la migliore posizione che, come abbiamo visto, è uno qualsiasi degli angoli compresi tra 120° e 180°, e poi “spera” che il **bar 4** compia una scelta fra le due o tre per lui equivalenti ma che per noi potrebbe essere molto favorevole. In quali casi si può sperare in un tale risultato vantaggioso?

A 120°, il primo angolo che mi consente di avere **90 clienti sicuri**, al bar 3 converrà posizionarsi a 240°. Il **bar 4** potrà scegliere indifferentemente uno dei seguenti tre angoli: 60°, 180° e 300°. In ciascuno di questi tre casi il **bar 4** avrà sempre 60 clienti ma se per caso sceglie l’ultima di queste opzioni noi **bar 2** ci ritroveremo con 120 clienti! La probabilità che questo accada è 1/3.

Aumentando l’angolo α in cui posizionare il bar 2 fino a 180°, come abbiamo già visto, il numero dei nostri clienti sicuri resta sempre 90 ma se teniamo conto anche della scelta che dovrà compiere il **bar 4**, ci accorgiamo che esso non avrà più alcuna convenienza a spostarsi verso i 360° e quindi noi non abbiamo alcuna speranza di poter essere “fortunati”. Ad esempio se noi ci posizionassimo a 130°, il **bar 3** andrebbe a 245° mentre al **bar 4** converrebbe solo la posizione a 65° con 65 clienti poiché le altre posizioni gli darebbero 57,50 clienti (a 187,50° oppure a 302,50°).

Conclusione

La prima cosa che si nota è che, qualunque scelta facciamo, non avremo mai meno di $1/8$ dei clienti totali. Dall'analisi fatta al punto 3 si deduce anche che i clienti ottenibili sono **sempre $1/4$** per una quantità di posizioni di $1/3$ di circonferenza (quelle comprese tra 120° e 180° , però in entrambi i versi) oppure $1/3$ del totale per due sole posizioni (i 120° in un verso o nell'altro), **senza possibilità di ottenere valori intermedi.**

La scelta migliore per posizionare il secondo bar è a 120° (oppure a un terzo della lunghezza della circonferenza) di distanza dal primo bar (in un senso o nell'altro, per un totale quindi di **due sole posizioni nell'intera stazione orbitante**): in questo caso potremo contare sicuramente su $1/4$ dei clienti totali della stazione orbitante o, se saremo fortunati, su $1/3$ dei clienti totali.

Dal punto di vista statistico questa probabilità è del 33,33%, ma talvolta la fortuna può anche essere aiutata...

Saluti a tutti

Giuseppe Musolino, Decollatura 18 sett. 2008