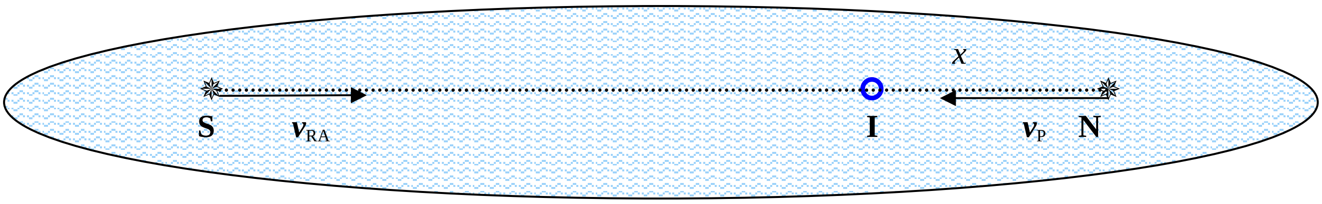
Traiettorie e trattorie

Problema di marzo 2009

Problema n. 1

Per quanto riguarda il primo problema la risoluzione avviene con l'utilizzo delle formule della cinematica riguardanti il moto rettilineo uniforme.



Con riferimento al disegno poniamo:

1. S = posizione della boa Sud
2. N = posizione della boa Nord
3. d = distanza tra S e N, l'incognita
4. $\boldsymbol{v}_{RA}$ = velocità della barca di Rudy e Alice (in m/s)
5. $\boldsymbol{v}_{P}$ = velocità della barca di Piotr (in m/s)
6. x = distanza tra il punto I in cui si incontrano per la prima volta le barche e la boa N.

Considerando t = 0 l'istante in cui le due barche "partono", quando si incontreranno in I sarà, ovviamente, passato lo stesso tempo per entrambe. Quindi:

$$\frac{s_{RA}}{v_{RA}} = \frac{x}{v_P}$$

Sapendo che $s_{RA} = 720m$, l'equazione diventa:

$$\frac{720}{v_{RA}} = \frac{x}{v_P}$$

Per ottenere una seconda equazione, pur non conoscendo il tempo che passa tra l'istante in cui le barche si incontrano in I e quello in cui Rudy e Alice si trovano al giro della boa Nord, possiamo comunque scrivere:

$$\frac{x+400}{v_{RA}} = \frac{720+720+x-400}{v_P}$$

Il sistema risolutivo quindi è:

$$\begin{cases} \dfrac{720}{v_{RA}} = \dfrac{x}{v_P} \\ \dfrac{x+400}{v_{RA}} = \dfrac{1040+x}{v_P} \end{cases}$$

Apparentemente il sistema è indeterminato perché contiene due equazioni e tre incognite. Però, ricavando, ad esempio, v_P dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, otteniamo:

$$\begin{cases} v_P = \dfrac{x}{720} \cdot v_{RA} \\ (x+400) \cdot \dfrac{x \cdot v_{RA}}{720} = (1040 + x) \cdot v_{RA} \end{cases}$$

Lavorando solo sulla seconda equazione, osserviamo che v_{RA} si semplifica e quindi otteniamo l'equazione in *x*:

$$x^2 - 320x - 748800 = 0$$

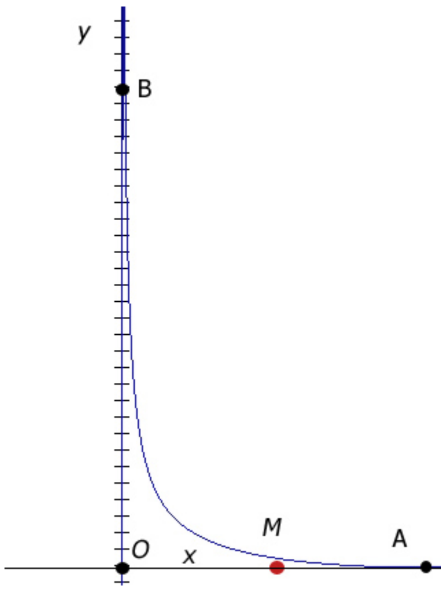
che, scartando la soluzione negativa, dà $x = 1040m$. Sommando 720 a questo valore otteniamo che le due boe distano $d = 1040 + 720 = 1760m$ che è la distanza cercata.

Problema n. 2

Si tratta di un classico *problema di inseguimento*.

Bella la trappola tesa con la parola "trattrice" buttata lì come una *polpetta avvelenata* (… in tema di trattorie)! In effetti non è questa la curva che interessa perché la *trattrice* si ha quando un oggetto viene trascinato (da cui *trattrice*) con una catenella, guinzaglio, ecc. da un motore che si muove in linea retta. La distanza tra i due punti rimane costante e quindi il corpo trascinato non potrà mai raggiungere il motore. Il caso proposto è invece quello che appartiene alla categoria dei ***problemi di inseguimento***, cioè quelli in cui un inseguitore (tipicamente un cane) si muove puntando continuamente verso la posizione del "fuggitivo" che si muove lungo una retta a velocità costante. Solo se il modulo della velocità dell'inseguitore è uguale a quella della preda, la traiettoria descritta dall'inseguitore tende in maniera asintotica a quella della trattrice.

Nel nostro caso la velocità del cuoco-inseguitore è maggiore di quella dei fuggitivi Rudy e Alice che quindi verranno certamente raggiunti. Per schematizzare, usando un sistema di riferimento cartesiano *xOy*, stabiliamo che:

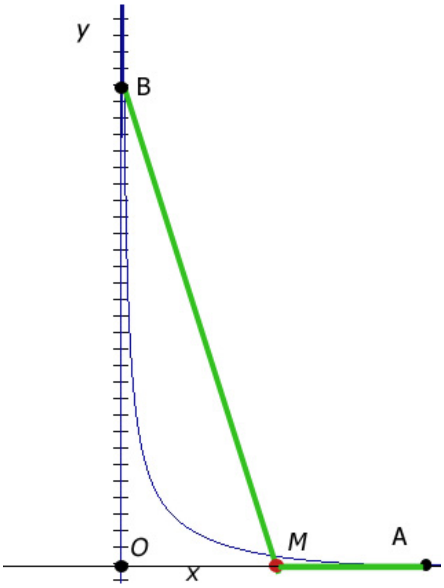


1. La barca di Rudy e Alice sia in *O* nell'istante iniziale e che si muova nel verso del semiasse positivo delle y
2. Il gommone del cuoco parta da un punto A di coordinate A(300;0) posto quindi sul semiasse positivo delle x
3. Il rapporto tra le velocità del cuoco e quella di Rudy-Alice sia *k*, uguale a 5/3.

In questo caso si ottiene come traiettoria del gommone del cuoco la curva che riporto nell'immagine a lato.

Si tratta, come già detto della classica curva di inseguimento di una preda che si muove in linea retta. L'equazione cartesiana della curva è alquanto complessa ma il punto B(0;b) in cui l'inseguitore raggiunge la preda è ottenibile usando solo il rapporto delle velocità e l'ascissa del punto A(a;0) secondo la relazione: $b = \dfrac{k}{1-k^2} a$.

Quindi nel nostro sarà **b = 281,25 *m***.



Per trovare il tempo usiamo la relazione t=s/v riferita alla barca di Rudy e Alice; quindi otteniamo **t = 168,75 secondi = 2 minuti e 48,75 secondi**.

Per trovare la distanza percorsa dal gommone del cuoco o si usa l'integrale curvilineo… oppure un teorema sull'isometria che dice che il percorso effettivo dell'inseguitore lungo la curva di inseguimento è equivalente alla lunghezza di segmento **AM** (M è il punto medio del segmento avente per estremi le posizioni iniziali di preda e inseguitore) più la distanza da **M** a **B**, dove **B** è il già citato punto di raggiungimento del fuggitivo.

Sostituendo i valori scopriamo che il cuoco ha percorso con il gommone **468,75 metri** prima di raggiungere la barca di Rudy e Alice.

Giuseppe Musolino
Decollatura, 17 marzo 2009